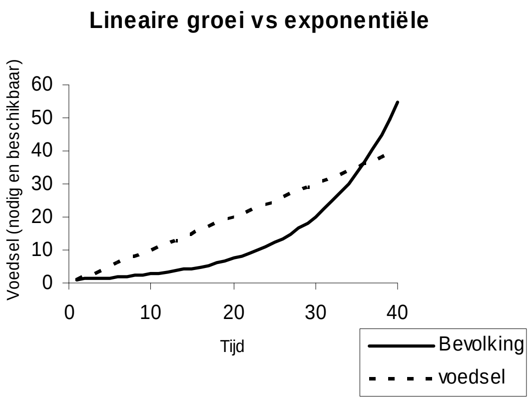
Voor de docent

Uitwerking van de vragen

Opdracht 1

(a) $N(t) = N_0 e^{rt} \Rightarrow N'(t) = rN_0 e^{rt} = rN(t) \Leftrightarrow \dfrac{dN}{dt} = rN$

(b) De voorspelling van Malthus is gebaseerd op een lineair toenemende voedselproductie en een exponentieel groeiende bevolking. Het is eenvoudig om een exponentiële functie en een lineaire uit te zetten in één grafiek. De exponentieel groeiende bevolking groeit op een gegeven moment sneller dan de voedselproductie, daarom moeten er uiteindelijk mensen sterven aan voedseltekort.



Opdracht 2

(a) $\dfrac{dN}{dt} = 2(N-K) \quad \Rightarrow 0 = 2(N-K)$

$\Rightarrow N = K$

(b) $\dfrac{dN}{dt} = 1 - \dfrac{N}{K}$ → Deze afgeleide is nul als $N=K$.

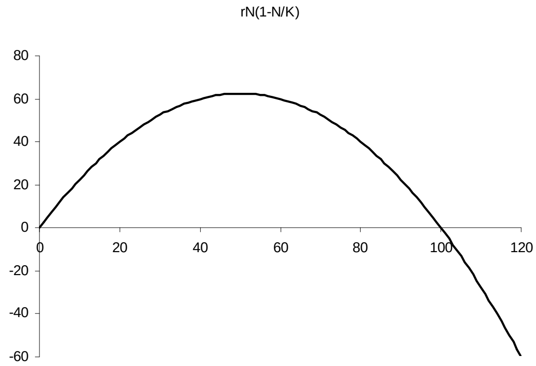
(c) $\dfrac{dN}{dt} = N^2 - K$ → Deze afgeleide is nul als $N = \sqrt{K}$.

(d) $\dfrac{dN}{dt} = a\,N$ → Deze afgeleide is nul als $N = 0$.

(e) $\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$ → Deze afgeleide is nul als $N = 0$ of $N=K$.

Tom Huisman, Egbert van Nes en Lia Hemerik

Opdracht 3



Hier links staat een plaatje van de functie $f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ met K=100 en r=2.5; het maximum ligt bij N=50 en de bijbehorende $f(N) = rK^2/4$.

Opdracht 4

(a)

$$0 = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - b\,N$$

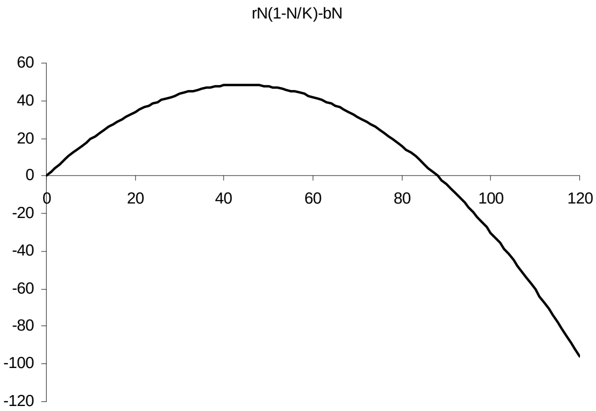
$$\Leftrightarrow N = 0 \vee r\left(1 - \frac{N}{K}\right) = b$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee r\,K - rN = b\,K$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee r\,K - b\,K = rN$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee N = \frac{r\,K - b\,K}{r}$$

(b) b=0.3; K=100; r = 2.5



Opdracht 5

(a) Van differentiaalvergelijking (6), $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{K} - \frac{C}{K}\right)$, worden de evenwichten eenvoudig gevonden door de verschillende termen op nul te stellen:

$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{K} - \frac{C}{K}\right) = 0$ valt uiteen tot $rN = 0$, $\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0$ of $\left(\frac{N}{K} - \frac{C}{K}\right) = 0$

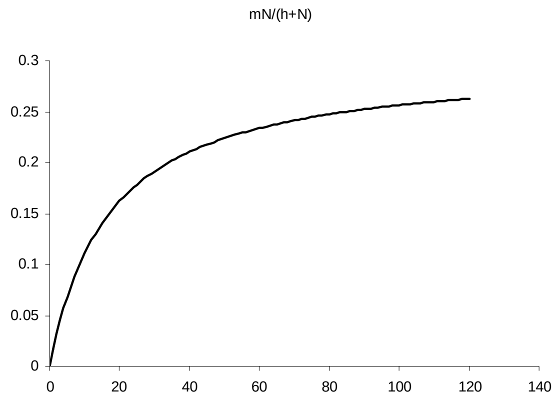
Dat is achtereenvolgens waar voor: N = 0, N = K of N = C.

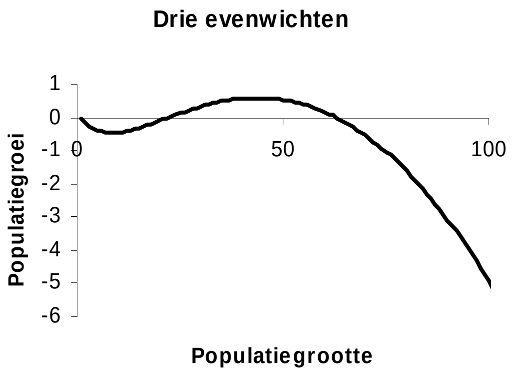
(b) Met C tussen 0 en K geldt dat de groei voor populatiegroottes tussen 0 en C negatief is. De populatiegrootte neemt dan dus af.

Opdracht 6

(a) Hieronder het plaatje van de functie 0.3*N*/(17+*N*)

(b) Er zijn drie evenwichten zichtbaar in het onderstaande figuur. Bij nul, ongeveer bij 64 en ongeveer bij 22. Het evenwicht bij 22 is instabiel en wordt derhalve nooit gezien. (m=0.3; r=0.2; K=100; h=17; B=20)





Opdracht 7

We stellen weer de afgeleide op nul $0 = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - B\frac{mN}{N+h}$.

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee 0 = r\left(1-\frac{N}{K}\right) - B\frac{m}{N+h} \qquad \Leftrightarrow N = 0 \vee \left(1-\frac{N}{K}\right) = \frac{Bm}{r(N+h)}$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee \left(1-\frac{N}{K}\right)(N+h) = \frac{Bm}{r} \Leftrightarrow N = 0 \vee -\frac{N^2}{K} + N - \frac{hN}{K} + h - \frac{Bm}{r} = 0$$

Vermenigvuldigen met $-K$ levert op:

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee N^2 - KN + hN - hK + \frac{BKm}{r} = 0$$

Met de ABC-formule $\frac{-b}{2a} {}^{+}\!/_{-} \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ voor de algemene tweedegraadsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ krijgen we dan

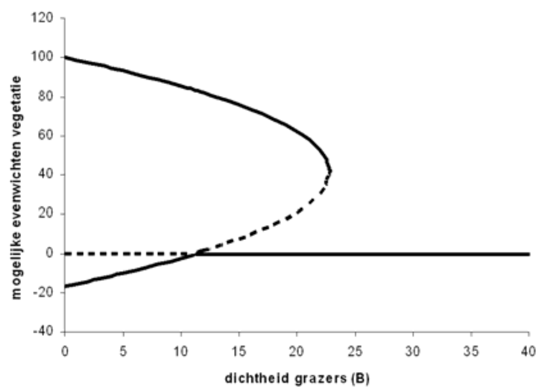
$$\Leftrightarrow N = 0 \vee N_{1,2} = \frac{K-h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(K-h)^2 + 4hK - \frac{4BKm}{r}}$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \vee N_{1,2} = \frac{K-h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(K+h)^2 - \frac{4BKm}{r}}$$

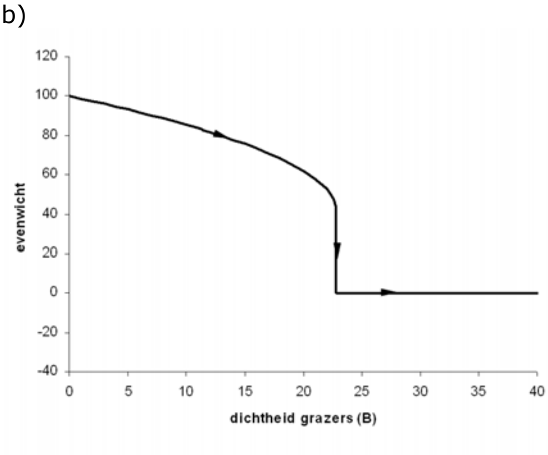
Opdracht 8

Hieronder tref je het bifurcatieplaatje aan (*m*=0.3; *r*=0.2; *K*=100; *h*=17; *B*=20) en wat er gebeurt als de parameter B van laag naar hoog wordt verandert of andersom.

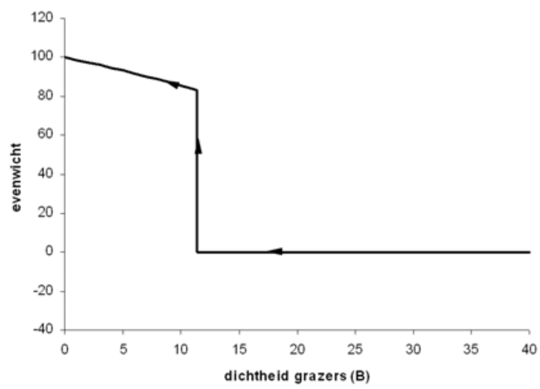
(a)



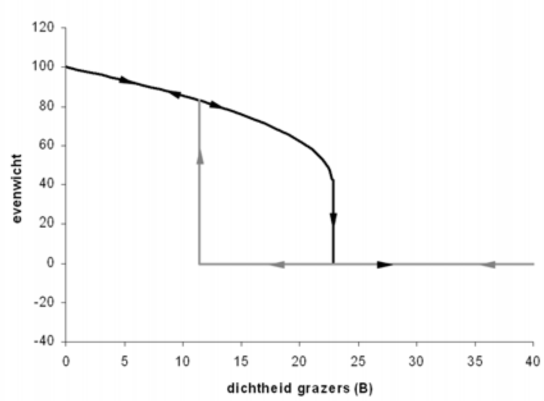
(b)



(c)



(d)



In de figuren hierboven staan (a) het bifurcatieplaatje van systeem (7), (b) het veranderen van het evenwicht bij hogere waarden van B, (c) het veranderen van de evenwichtswaarde bij verandering van B van hoge naar lage waarden en (d) het totale beeld.

Bij het verhogen van de begrazing kan het systeem nog een lange tijd planten en begrazers hebben, maar op een gegeven moment klapt de plantenpopulatie in door overbegrazing. De begrazing moet echter ruim omlaag om de planten weer de kans te geven een kritische massa op te bouwen. Met andere woorden het is handig om de plantenpopulatie tijd tot herstel te gunnen door geen grazers toe te laten en nadat de plantenpopulatie een bepaalde massa heeft kunnen er weer grazers worden ingezet.

Opdracht 9

Het uitwerken van de vergelijking $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - B\frac{mN^2}{N^2 + h^2}$ levert door het nul stellen van de afgeleide op dat

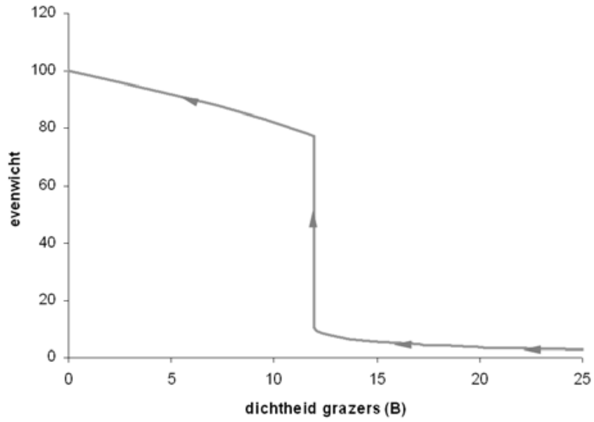
$$B = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N^2 + h^2}{mN^2}\right).$$

Met (m=0.3; r=0.2; K=100; h=10; B=20) geeft dat de volgende plaatjes.

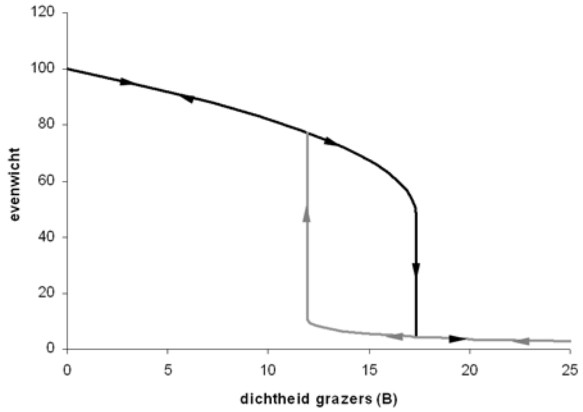
(a)

(b)

(c)



(d)



In de figuren hierboven staan (a) het bifurcatieplaatje van systeem (8), (b) het veranderen van het evenwicht bij hogere waarden van B, (c) het veranderen van de evenwichtswaarde bij verandering van B van hoge naar lage waarden en (d) het totale beeld.