

Toeval en voorspelbaarheid

Voor de docent

Uitvoering

Vaardigheden

Het valt aan te bevelen dat de docent(e) die zijn/haar leerlingen een project met Derive wil laten doen zelf eerst enige ervaring opdoet met Derive. De projecten kunnen ook op grafische rekenmachines worden uitgevoerd. Project 1 is redelijk te doen en daarom geven we geen uitwerkingen. Voor project 3 staan de resultaten na de uitwerking van de vragen

Uitwerkingen van de opdrachten.

ANTWOORD Opdracht 1

Niet: A h; A i; B h; B i; C i; C j; D i; D j.

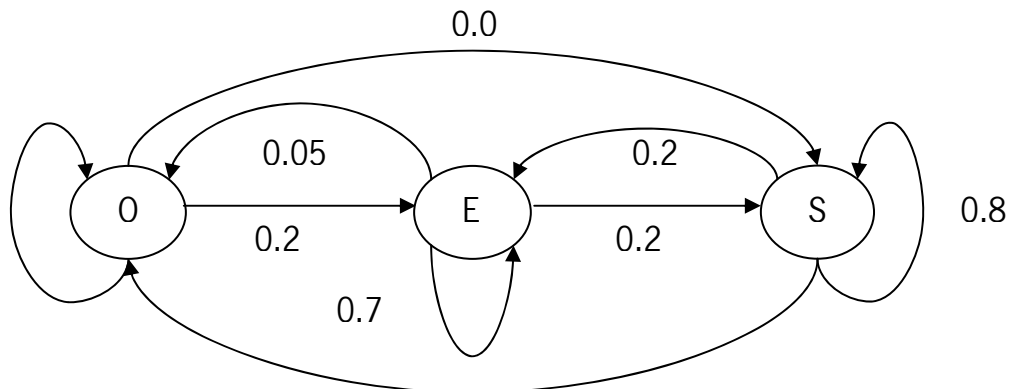
Wel: A j; B j; C h; D h

ANTWOORD Opdracht 2

$$E z = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, F z = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, E F = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}, F E = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

ANTWOORD Opdracht 3

a. Het getal dat bij het pijltje van Exacto (E) naar Schelp (S) hoort is 0,25



b. Uitkomst van $v(4) = \begin{pmatrix} 2315.575 \\ 4093.75 \\ 3590.675 \end{pmatrix}$ en van $v(6) = \begin{pmatrix} 1848.06175 \\ 4023.4375 \\ 4128.50075 \end{pmatrix}$

c. Uitkomst van $v(100) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 5000 \end{pmatrix}$ en van $v(101) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 5000 \end{pmatrix}$, zodat de verhouding

uiteindelijk 1000: 4000 : 5000 of 1: 4: 5 wordt en 50% van de klanten bij Schelp tankt.



Toeval en voorspelbaarheid

ANTWOORD Opdracht 4: Het weer in het land van Oz

a.
$$N = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

b. (1)
$$M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$
 de regenachtige dag is het meest waarschijnlijk

(2)
$$M^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$
 regen en sneeuw zijn even waarschijnlijk

(3)
$$M^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$
 na twee dagen is de kans op sneeuw het grootst.

c. de verhouding tussen regenachtige, stralende- en sneeuwdagen op de lange duur is 2:1:2

ANTWOORD Opdracht 5 Al dan niet delende cellen

a.
$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1000 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3906,25 \\ 6093,75 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1000 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3997,07 \\ 6002,93 \end{pmatrix}$$

uiteindelijk wordt de verhouding 40% delende cellen versus 60% niet-delende cellen.

e.
$$M \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
 conclusie de verhouding tussen delende en niet-delende cellen zal uiteindelijk p:q worden.

ANTWOORD Opdracht 6 Moeder-kind binding bij Rhesusapen

a.
$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{9}{10} A_n + \frac{1}{5} T_n + \frac{1}{5} O_n \\ T_{n+1} &= \frac{1}{10} A_n + \frac{3}{5} T_n + \frac{1}{10} O_n \\ O_{n+1} &= \frac{1}{5} T_n + \frac{7}{10} O_n \end{aligned} \qquad M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

c. begin met $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, bv. t=1: $\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, t=2: $\begin{pmatrix} 8,3 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$, t=3: $\begin{pmatrix} 7,81 \\ 1,75 \\ 0,44 \end{pmatrix}$, t=4: $\begin{pmatrix} 7,467 \\ 1,875 \\ 0,658 \end{pmatrix}$, t=40: $\begin{pmatrix} 6,67 \\ 2 \\ 3,33 \end{pmatrix}$



Toeval en voorspelbaarheid

d.

$$\begin{aligned} &\text{begin met } \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ bv. } t=2: \begin{pmatrix} 3,4 \\ 4 \\ 2,6 \end{pmatrix}, t=20: \begin{pmatrix} 6,661.. \\ 2,000.. \\ 3,338.. \end{pmatrix}, t=60: \begin{pmatrix} 6,67 \\ 2 \\ 3,33 \end{pmatrix} \\ &\text{begin met } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ bv. } t=2: \begin{pmatrix} 3,4 \\ 1,5 \\ 5,1 \end{pmatrix}, t=20: \begin{pmatrix} 6,6613.. \\ 1,9999.. \\ 1,3386.. \end{pmatrix}, t=60: \begin{pmatrix} 6,67 \\ 2 \\ 3,33 \end{pmatrix} \\ &\text{begin met } \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ bv. } t=2: \begin{pmatrix} 6,04 \\ 2,8 \\ 1,16 \end{pmatrix}, t=20: \begin{pmatrix} 7,9968.. \\ 2,4000.. \\ 1,6031.. \end{pmatrix}, t=60: \begin{pmatrix} 8 \\ 2,4 \\ 1,6 \end{pmatrix} \\ &\text{begin met } \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ bv. } t=2: \begin{pmatrix} 5,85 \\ 1,5 \\ 2,65 \end{pmatrix}, t=20: \begin{pmatrix} 6,6653.. \\ 1,9999.. \\ 1,3346.. \end{pmatrix}, t=60: \begin{pmatrix} 6,67 \\ 2 \\ 3,33 \end{pmatrix} \\ &\text{begin met } \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ bv. } t=2: \begin{pmatrix} 10,34 \\ 3,65 \\ 2,01 \end{pmatrix}, t=20: \begin{pmatrix} 10,6661.. \\ 3,2000.. \\ 2,1318.. \end{pmatrix}, t=60: \begin{pmatrix} 10,67 \\ 3,2 \\ 2,13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e. De uiteindelijke verhouding tussen de aantallen paren in de verschillen toestanden is A:T:O=10:3:2.

ANTWOORD Opdracht 7: Overerving van eigenschappen door kruisbestuiving

a.
$$D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

b.
$$t=0: \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}, t=1: \begin{pmatrix} 0,5625 \\ 0,125 \\ 0,3125 \end{pmatrix}, t=2: \begin{pmatrix} 0,59375 \\ 0,0625 \\ 0,34375 \end{pmatrix}, t=10: \begin{pmatrix} 0,6248.. \\ 0,0002.. \\ 0,3748.. \end{pmatrix}, t=20: \begin{pmatrix} 0,6249.. \\ 0,0000.. \\ 0,3749.. \end{pmatrix},$$

c.
$$t=0: \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}, t=30: \begin{pmatrix} 0,4999.. \\ 0,0000.. \\ 0,4999.. \end{pmatrix}, t=0: \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,8 \\ 0,1 \end{pmatrix}, t=30: \begin{pmatrix} 0,4999.. \\ 0,0000.. \\ 0,4999.. \end{pmatrix}, t=0: \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \\ 0,0 \end{pmatrix}, t=30:$$

$$\begin{pmatrix} 0,5499.. \\ 0,0000.. \\ 0,4499.. \end{pmatrix},$$

d. De heterozygoot (het Aa-genotype) sterft door zelfbestuiving langzaam uit en de uiteindelijke verdeling over de twee homozygote genotypen AA en aa hangt af van de beginverdeling. Wanneer ze beiden gelijk vertegenwoordigd zijn in het begin dan is dat uiteindelijk ook het geval.

Voor project 3 geven we hieronder de Derive resultaten weer:



Toeval en voorspelbaarheid

#1: $p := \begin{pmatrix} 100 \\ 4000 \end{pmatrix}$

#2: $M := \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 1,0 & 0,9 \end{pmatrix}$

a. bereken na 1 en 2 tijdstappen de verdeling van delende en niet-delende cellen.

#3: $M.p$

Druk na selectie van #3 de toets "≈" om het resultaat te krijgen.

#4: $\begin{pmatrix} 460 \\ 3700 \end{pmatrix}$

#5: $M^2.p$

Druk na selectie van #5 de toets "≈" om het resultaat te krijgen.

#6: $\begin{pmatrix} 646 \\ 3790 \end{pmatrix}$

b.

#7: $M^{12}.p$

Druk na selectie van #7 de toets "≈" om het resultaat te krijgen.

#8: $\begin{pmatrix} 1883,05 \\ 9415,30 \end{pmatrix}$

#9: $h := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

#10: $h^T.M^{12}.p$

Druk na selectie van #10 de toets "≈" om het resultaat te krijgen.

#11: $[[11298.35]]$

c. (N.B. vanaf nu nemen we aan dat de gebruiker wel weet dat de toets "≈" gebruikt wordt om het resultaat in beeld te krijgen in Derive 5.0 for windows).

#12: $(h^T \cdot M^{t+1} \cdot d) / (h^T \cdot M^t \cdot d)$

d.

#13: $t:=1$

#14: $[[1.066346153]]$

#15: $t:=2$

#16: $[[1.087376014]]$

#17: $t:=3$

#18: $[[1.095356165]]$

e.

#19: $t:=30$

#20: $[[1.1]]$

#21: $t:=31$

#22: $[[1.1]]$

f.

#23: $p / (h^T \cdot p)$



Toeval en voorspelbaarheid

$$\#24: \begin{pmatrix} 0.024390244 \\ 0.97560976 \end{pmatrix}$$

$$\#25: (M.p)/(h^{\cdot} .M.p)$$

$$\#26: \begin{pmatrix} 0.1105769 \\ 0.8894238 \end{pmatrix}$$

Ja die verhouding verandert steeds.

g.

$$\#27: (M^{30}.p)/(h^{\cdot} .M^{30}.p)$$

$$\#28: \begin{pmatrix} 0.1666666 \\ 0.8333333 \end{pmatrix}$$

$$\#27: (M^{31}.p)/(h^{\cdot} .M^{31}.p)$$

$$\#28: \begin{pmatrix} 0.1666666 \\ 0.8333333 \end{pmatrix}$$

De verhouding tussen het aantal delende en niet-delende cellen stabiliseert na verloop van tijd.

Documentatie

Voor verdieping raden we bijvoorbeeld aan:

Kemeny J.G. and J.L. Snell 1969 "Finite Markov Chains" D. van Nostrand Company, New York

