

Populaties in de tijd

Voor de docent

Uitvoering

Vaardigheden

Het is natuurlijk mogelijk om slechts een deel van de hier voorgestelde opdrachten uit te werken. Het lijkt echter noodzakelijk dat de leerlingen het theorie gedeelte eerst doornemen en vervolgens met Derive 5.0 voor Windows oefenen en als laatste stap voor de opdrachten met Derive het voorbeeld doorwerken.

Uitwerking van de opdrachten.

Opdracht 1

Niet: A h; A i; B h; B i; C i; C j; D i; D j.

Wel: A j; B j; C h; D h

Opdracht 2

$$E z = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \dots, F z = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, E F = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}, F E = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Opdracht 3: Een plantenpopulatie.

a. Dat is de kans dat een zaadje een pas gevestigde plant oplevert maal de kans dat deze plant het haalt tot volwassen plant: $0.01 \times 0.1 = 0.001$.

b. $t = 1: \begin{pmatrix} 10^6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; t = 5: \begin{pmatrix} 10^9 \\ 10^7 \\ 100 \end{pmatrix}; t = 6: \begin{pmatrix} 10^8 \\ 10^7 \\ 10^6 \end{pmatrix}; t = 10: \begin{pmatrix} 10^{15} \\ 10^9 \\ 10^9 \end{pmatrix}$ en $t = 11: \begin{pmatrix} 10^{15} \\ 10^{13} \\ 10^8 \end{pmatrix}$

c. Nee, verhoudingen $10^6 : 1 : 1$; $10^7 : 10^5 : 1$; $100 : 10 : 1$; $10^6 : 1 : 1$; $10^7 : 10^5 : 1$. Wel valt op dat de verhoudingen op tijdstip 5 en 11 hetzelfde zijn. Er zit een vast patroon in om de drie keer komt er dezelfde verhouding uit.

d. Ja, nu wordt deze beginvector met elke matrixvermenigvuldiging met het aantal 10 vermenigvuldigd en de verhouding is en blijft $10^5 : 10^2 : 1$.



Populaties in de tijd

Opdracht 4: De kleine hoefijzerneus.

a. $L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ Let er op dat de reproductie- en overlevingscijfers goed berekend worden over

een periode van twee jaar met sexeverhouding 1 : 1.

- b. Dat is de vermenigvuldiging van de kans om van leeftijd 0 leeftijd 2 te krijgen, de kans dat de vleermuis heeft om als zij 2 jaar oud is 4 jaar te worden en de kans dat de vleermuis heeft gegeven dat zij 4 jaar oud is om te overleven tot 6 jaar. $(1/6) \times (1/3) \times (1/3) = (1/54)$

In Derive kan je dit bepalen door de matrix L in te voeren en $L^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ uit te rekenen. Het laatste

getal in de vector die het resultaat weergeeft is dan de overlevings kans van 0 tot 6 jarige vleermuis.

c. $x(1) = \begin{pmatrix} 600 \\ 60 \\ 150 \end{pmatrix}$, $x(2) = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix}$, $x(3) = \begin{pmatrix} 226\frac{2}{3} \\ 46\frac{2}{3} \\ 56\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $x(10) = \begin{pmatrix} 12.48 \\ 3.12 \\ 3.12 \end{pmatrix}$, $x(11) = \begin{pmatrix} 8.33 \\ 2.08 \\ 2.08 \end{pmatrix}$

en $x(20) = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}$

- d. Na 10 perioden $12.48 : 3.12 : 3.12 = 4 : 1 : 1$, na 11 perioden $8.33 : 2.08 : 2.08 = 4 : 1 : 1$ etc.

- e. Na 1 periode 810; na 2 perioden 450; na 3 perioden 330; na 10 perioden 18,72; na 11 perioden 12,49; na 20 perioden 0.32. De verhouding (totaal na 22 jaar) / (totaal na 20 jaar) = circa $(2/3)$. Conclusie de populatie vleermuizen met deze Lesliematrix is duidelijk in haar voortbestaan bedreigd.

f. (i) $x(1) = \begin{pmatrix} 1200 \\ 60 \\ 150 \end{pmatrix}$, $x(2) = \begin{pmatrix} 560 \\ 200 \\ 70 \end{pmatrix}$, $x(3) = \begin{pmatrix} 720 \\ 93\frac{1}{3} \\ 90 \end{pmatrix}$, $x(10) = \begin{pmatrix} 206.98 \\ 40.89 \\ 25.87 \end{pmatrix}$, $x(11) = \begin{pmatrix} 178.03 \\ 34.50 \\ 22.25 \end{pmatrix}$ en

$x(20) = \begin{pmatrix} 42.82 \\ 8.36 \\ 5.35 \end{pmatrix}$. De totale aantallen vleermuizen zijn respectievelijk 1410; 830; 903.33;

273.74;
234.78; 56.54.

(ii) $x(1) = \begin{pmatrix} 600 \\ 120 \\ 300 \end{pmatrix}$, $x(2) = \begin{pmatrix} 560 \\ 200 \\ 280 \end{pmatrix}$, $x(3) = \begin{pmatrix} 640 \\ 186\frac{2}{3} \\ 320 \end{pmatrix}$, $x(10) = \begin{pmatrix} 1070.66 \\ 330.88 \\ 535.33 \end{pmatrix}$, $x(11) = \begin{pmatrix} 1154.94 \\ 356.89 \\ 577.47 \end{pmatrix}$ en



Populaties in de tijd

$$x(20) = \begin{pmatrix} 2283.63 \\ 705.68 \\ 1141.82 \end{pmatrix} \text{ De totale aantallen vleermuizen zijn respectievelijk } 1020; 1040; \\ 1146.67; 1936.88; 2089.31; 4131.12$$

De natuurbeheerder kiest duidelijk voor verhoging van de overleving en niet van de reproductie. Een populatie met een tweemaal zo hoge reproductie sterft ook uit.

Opdracht 5: Rendieren op het eiland South Georgia.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.45 & 0.9 \\ 0.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0.68 & 0.1 \end{pmatrix}, v(0) = \begin{pmatrix} 750 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$$

a. percentage van de vrouwelijke rendieren dat de leeftijd van 12 jaar bereikt is veel minder dan 1%: $0.71 \cdot 0.68 \cdot 0.1^{10} = 4.83 \cdot 10^{-11}$

$$b. v(1) = \begin{pmatrix} 450 \\ 532.5 \\ 365 \end{pmatrix}, v(2) = \begin{pmatrix} 568.125 \\ 319.5 \\ 398.6 \end{pmatrix}, v(3) = \begin{pmatrix} 502.15 \\ 403.37 \\ 257.12 \end{pmatrix}, v(10) = \begin{pmatrix} 271.6 \\ 20860 \\ 17691 \end{pmatrix}, v(11) = \begin{pmatrix} 253.09 \\ 192.89 \\ 159.54 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$v(20) = \begin{pmatrix} 120.03 \\ 92.55 \\ 76.56 \end{pmatrix}$$

Na 10 perioden $271.67 : 208.60 : 176.91 = 0.4133 : 0.3174 : 0.2692$, na 11 perioden $253.09 : 192.89 : 159.54 = 0.4180 : 0.3185 : 0.2635$ etc.

Totale aantallen vrouwelijke rendieren volgens het model: in 1959 zijn er 1347.5; in 1960 zijn er ongeveer 1286; in 1961 zijn er ongeveer 1163; in 1968 zijn er ongeveer 657; in 1969 zijn er ongeveer 605; in 1978 zijn er nog slechts 289. De verhouding (totaal na 11 jaar) / (totaal na 10 jaar) = circa 0.92. Conclusie de populatie rendieren met deze Lesliematrix is duidelijk in haar voortbestaan bedreigd.

Scenario (i): verhoogde reproductie (eerste rij van matrix R met 1.1 vermenigvuldigd).

$$(i) \quad v(1) = \begin{pmatrix} 495 \\ 532.5 \\ 365 \end{pmatrix}, \quad v(2) = \begin{pmatrix} 624.94 \\ 351.45 \\ 398.6 \end{pmatrix}, \quad v(3) = \begin{pmatrix} 568.58 \\ 443.71 \\ 278.85 \end{pmatrix}, \quad v(10) = \begin{pmatrix} 398.73 \\ 295.03 \\ 239.96 \end{pmatrix},$$

$$v(11) = \begin{pmatrix} 383.60 \\ 283.10 \\ 224.62 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$v(20) = \begin{pmatrix} 250.55 \\ 186.48 \\ 148.29 \end{pmatrix}. \text{ De totale aantallen rendieren zijn respectievelijk circa } 1392, 1375, 1291,$$

933, 891 en 585.



Populaties in de tijd

Scenario (ii): verhoogde overleving (laatste twee rijen van matrix R met 1.1 vermenigvuldigd).

$$(ii) \quad v(1) = \begin{pmatrix} 450 \\ 585.75 \\ 401.05 \end{pmatrix}, v(2) = \begin{pmatrix} 624.94 \\ 351.45 \\ 482.31 \end{pmatrix}, v(3) = \begin{pmatrix} 592.23 \\ 488.08 \\ 315.94 \end{pmatrix}, v(10) = \begin{pmatrix} 481.04 \\ 383.49 \\ 338.95 \end{pmatrix}, v(11) = \begin{pmatrix} 477.62 \\ 375.70 \\ 324.14 \end{pmatrix}$$

en $v(20) = \begin{pmatrix} 388.43 \\ 310.23 \\ 266.94 \end{pmatrix}$ De totale aantallen rendieren zijn respectievelijk circa 1437, 1459, 1396, 1203, 1177 en 965.

De rendierpopulatie zou het in beide gevallen aanmerkelijk beter doen, maar de populatiegrootte neemt nog steeds af. Als de reproductie 10% hoger is wordt de populatiegrootte jaarlijks met circa 0.9544 vermenigvuldigd en als de overleving 10% beter is wordt de vermenigvuldigingsfactor per jaar circa 0.9782.

Opmerkingen met betrekking tot het project over de knobbelzwaan:

De dominante eigenwaarde van matrix A is 1,053547. De bijbehorende eigenvector is $(0.72, 0.438, 0.483, 0.229, 0.047, 0.00178)^T$.

De dominante eigenwaarde van matrix B is 0,716377. De bijbehorende eigenvector is $(0.703, 0.627, 0.176, 0.267, 0.101, 0.00141)^T$.

De dominante eigenwaarde van matrix E is 1,053977. De bijbehorende eigenvector is $(0.833, 0.277, 0.395, 0.265, 0.0542, 0.00206)^T$.

Conclusies:

De situaties in Nederland en Engeland verschillen niet veel: de totale populatie knobbelzwanen neemt in beide landen met een factor van circa 1,05 per jaar toe.

Veel strenge winters hebben een grote invloed op de aantalsontwikkeling van de populatie knobbelzwanen. Wanneer exact eens in de tien jaar een strenge winter optreedt is de gemiddelde groei van een knobbelzwanenpopulatie gelijk aan 1,014 per jaar.

